Geometria Frattale

Luca Amata
lamata@unime.it

Dipartimento MIFT
Università di Messina

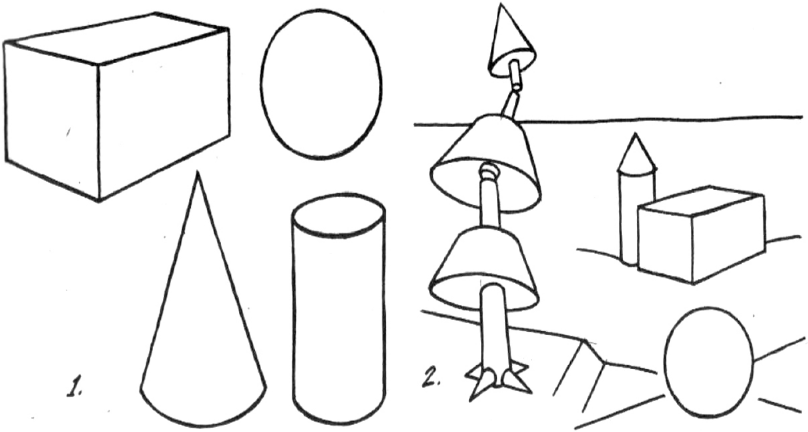
UNIME OPEN DAY

19 maggio 2022

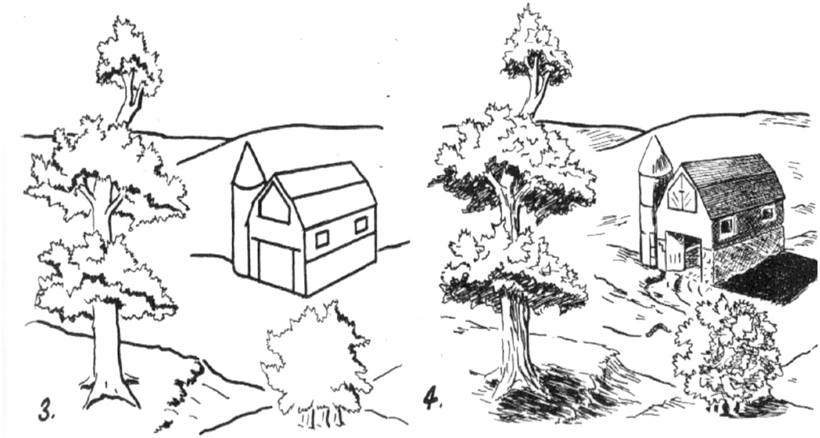
La geometria della natura

La geometria della natura

La geometria della natura



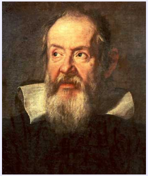
La geometria della natura



La geometria della natura

Galileo Galilei (1623)

Il libro della natura è scritto in lingua matematica ed i suoi caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.



Benoit B. Mandelbrot (1975)

La geometria euclidea è incapace di descrivere la natura nella sua complessità, in quanto si limita a descrivere tutto ciò che è regolare [. . .] mentre osservando la natura vediamo che le montagne non sono dei coni, le nuvole non sono delle sfere, le coste non sono dei cerchi, ma sono oggetti geometricamente molto complessi.

La “vecchia” geometria

Gli Elementi di Euclide

1. È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
2. È possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.
3. È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza qualsiasi.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.
5. Se una retta, intersecando altre due, forma con esse da una medesima parte angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l’incontrarsi dalla parte detta.

La Fisica di Aristotele

Delle grandezze, quella che ha una dimensione è linea, quella che ne ha due è superficie, quella che ne ha tre è corpo, e al di fuori di queste non si hanno altre grandezze...

La geometria della natura

Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna? (1967, M.)

Usando un "metro" di 200 km $\longrightarrow \sim 12 \times 200$ km $= 2400$ km

Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna? (1967, M.)

Usando un “metro” di 100 km $\longrightarrow \sim 28 \times 100$ km $= 2800$ km

Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna? (1967, M.)

Usando un "metro" di 50 km $\longrightarrow \sim 69 \times 50$ km $= 3450$ km

Che cos'è un Frattale?

Les objects fractals (1975)
di Benoit B. Mandelbrot

Figura geometrica o oggetto naturale con una parte della sua forma o struttura che si ripete a scala differente, con forma estremamente irregolare interrotta e frammentata a qualsiasi scala e con elementi distinti di molte dimensioni differenti.

Meraviglie senza fine saltano fuori da semplici regole, se queste sono ripetute senza una fine.

Che cos'è un Frattale?

Definizione intuitiva

I **frattali** sono figure geometriche caratterizzate dal ripetersi di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta, all'infinito.

Un frattale è un insieme F che ha le seguenti proprietà

- **Auto-somiglianza**: F è unione di un numero di parti che, ingrandite di un certo fattore, riproducono tutto F. Cioè F è unione di copie di se stesso a scale differenti;
- **Struttura fine**: F rivela dettagli a ogni ingrandimento;
- **Irregolarità**: F non si può descrivere come luogo di punti che soddisfano semplici condizioni geometriche o analitiche,
- **Dimensione frazionaria**: F ha dimensione non intera, non rappresenta quindi un oggetto geometrico euclideo.

Un'immagine del cavolo

Trasformazioni ripetute

Una costruzione

In generale i frattali possono essere costruiti ripetendo “all’infinito” certe operazioni aritmetiche, che corrispondono a trasformazioni geometriche.

Funzioni reali

- Un punto del piano cartesiano si può rappresentare con le sue coordinate (x, y), cioè con una coppia di numeri reali.
- Supponiamo di partire da un punto (x_0, y_0) e di calcolare un nuovo punto le cui coordinate siano ad esempio (x_1, y_1) con:

$$x_1 = x_0^2 - y_0^2 + a, \qquad y_1 = 2x_0 y_0 + b$$

  dove a e b sono dei numeri fissati.

Ad esempio, se $a = 1$ e $b = -2$, partendo da $(x_0, y_0) = (0, 0)$ si ha:

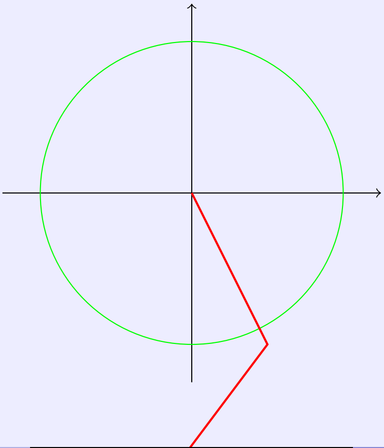
$(x_1, y_1) = (0-0+1, 0-2) = (1, -2)$ e $(x_2, y_2) = (1-4+1, -4-2) = (-2, -6) \ldots$

Simulazione: $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(a, b) = (1, -2)$

$P_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ $\quad P_1 = (x_1, y_1) = (1, -2)$ $\quad P_2 = (x_2, y_2) = (-2, -6)$

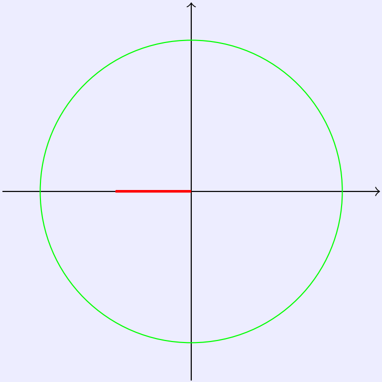
$P_3 = (-31, 22)$ $\quad P_4 = (478, -1366)$ $\quad P_5 = (-1637471, -1305898)$

$P_6 \approx (9.7 \cdot 10^{11}, 4.3 \cdot 10^{12})$ $\quad P_7 \approx (-1.7 \cdot 10^{25}, 8.3 \cdot 10^{24})$ $\quad P_8 \approx (2.3 \cdot 10^{50}, -2.8 \cdot 10^{50})$



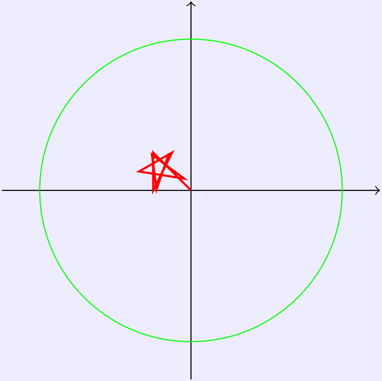
Simulazione: $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(a, b) = (-1, 0)$

$$\begin{array}{lll} P_0 = (0,0) & P_1 = (-1,0) & P_2 = (0,0) \\ P_3 = (-1,0) & P_4 = (0,0) & P_5 = (-1,0) \\ P_6 = (0,0) & P_7 = (-1,0) & P_8 = (0,0) \end{array}$$



Simulazione: $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(a, b) = (-0.5, 0.5)$

$P_0 = (0, 0)$ $P_1 = (-0.5, 0.5)$ $P_2 = (-0.5, 0)$
$P_3 = (-0.25, 0.5)$ $P_4 = (-0.6875, 0.25)$ $P_5 = (-0.0898, 0.1563)$
$P_6 \approx (-0.5163, 0.4719)$ $P_7 \approx (-0.4561, 0.0127)$ $P_8 \approx (-0.2921, 0.4885)$



Trasformazioni ripetute

Funzioni complesse

- Usando i numeri complessi, nel cosiddetto piano di Argand–Gauss, il punto (x, y) rappresenta il numero complesso $z = x + iy$.
- Partendo dal numero complesso $z_0 = x_0 + iy_0$, avendo fissato $c = a + ib$, possiamo calcolare la funzione:

$$z_1 = z_0^2 + c.$$

- Ora ripetiamo l'operazione e troviamo:

$$z_2 = z_1^2 + c.$$

- Ripetendo le operazioni ($z_n = z_{n-1}^2 + c$), otteniamo una successione di punti:

$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

- A quale punto arriveremo?

Trasformazioni ripetute

Alcune riflessioni

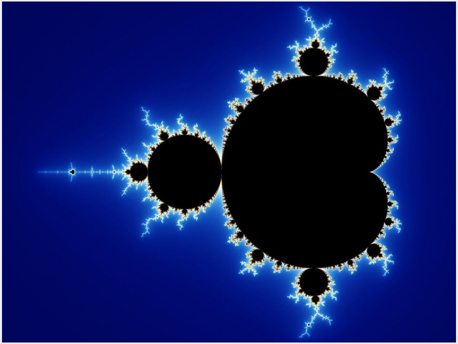
- Il punto di arrivo dipende dal punto $c = (a, b)$ e dal punto di partenza $z_0 = (x_0, y_0)$.
- Per alcuni valori di c e/o di z_0 il punto *immagine* va "all'infinito", cioè si allontana indefinitamente. Questi punti sono detti di **divergenza**.
- In altri casi il punto *immagine* rimane nelle vicinanze del punto di partenza, all'interno di un cerchio prefissato. Tra questi punti possono trovarsi punti di **convergenza**.

Trasformazioni ripetute

Creare una rappresentazione

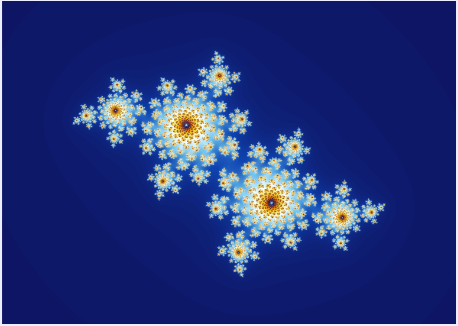
- È possibile attribuire dei colori ai punti immagine di una trasformazione, in base al numero di iterazioni n necessarie affinché il punto esca dal cerchio prefissato.
- Utilizzando le coordinate del piano complesso ed i colori ottenuti, è possibile disegnare dei *pixel* sul monitor di un computer.
- Cambiando la legge matematica che trasforma il punto è possibile ottenere insiemi frattali differenti, le cui forme e colorazioni dipendono da essa.

L'insieme di Mandelbrot



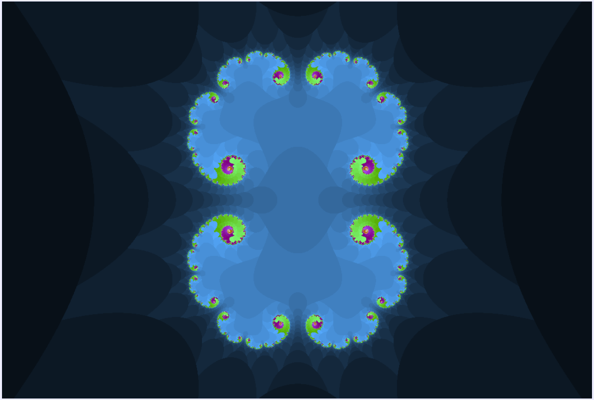
- Trasformazione: $z_n = z_{n-1}^2 + c$;
- Punto di partenza: $z_0 = (0, 0)$;
- Per ogni punto del piano $c = (a, b)$, viene avviata l'iterazione per ottenere la sequenza $z_0, z_1, \ldots, z_n$ e stabilire un colore.

Un insieme di Julia



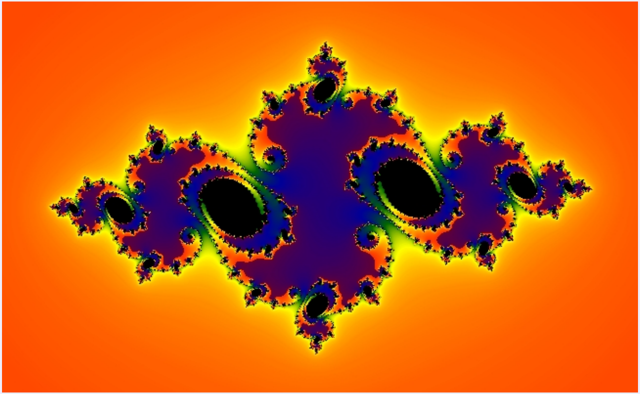
- Trasformazione: $z_n = z_{n-1}^2 + c$;
- Si fissa il parametro: $c = (a, b) = (0.06, 0.7)$;
- Per ogni punto del piano $z_0 = (x, y)$, viene avviata l'iterazione per ottenere la sequenza $z_0, z_1, \ldots, z_n$ e stabilire un colore.

Un altro insieme di Julia



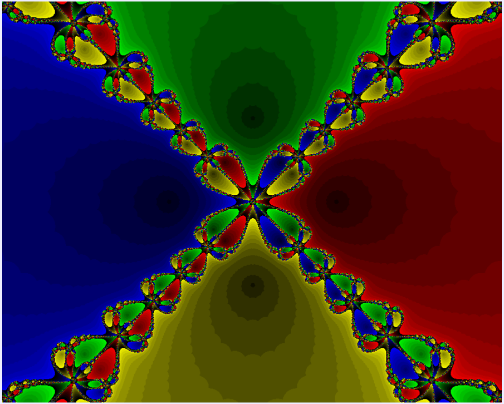
- Trasformazione: $z_n = z_{n-1}^2 + c$;
- Si fissa il parametro: $c = (a, b) = (0.3, 0)$;

Un altro^2 insieme di Julia



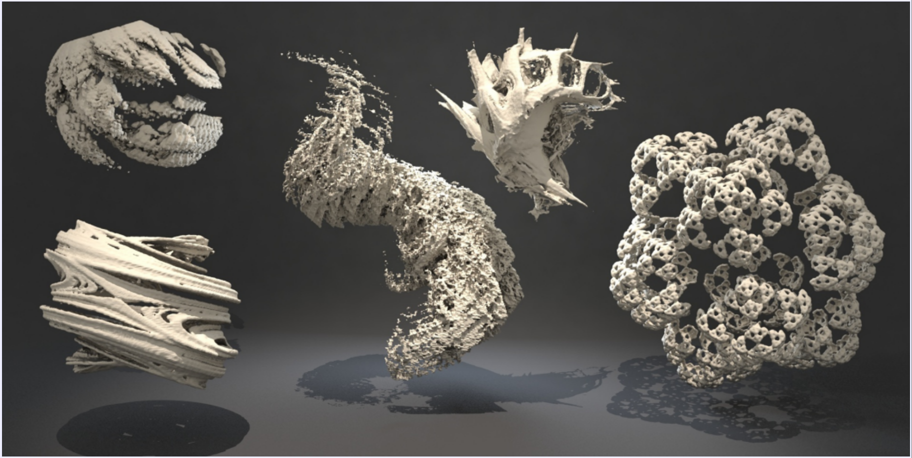
- Trasformazione: $z_n = z_{n-1}^2 + c$;
- Si fissa il parametro: $c = (a, b) = (-0.751, -0.08)$;

Un insieme frattale di Newton



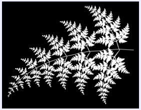
- Trasformazione: $z_n = z_{n-1} - \dfrac{z_{n-1}^4 - 1}{4z_{n-1}^3}$;
- Per ogni punto del piano $z_0 = (x, y)$, viene avviata l'iterazione per ottenere la sequenza $z_0, z_1, \ldots, z_n$ e stabilire un colore.

Tentativi tridimensionali



Frattalizziamoci!

http://benojt.sourceforge.net/
(java -jar benoit_0.7.jar)



http://dmi.units.it/~logar/mescef/indexITA.html
(java -jar Fratt.jar)

https://www.java.com/it/download/