Costruire la Matematica

Luca Amata

DIPARTIMENTO MIFT
UNIVERSITÀ DI MESSINA

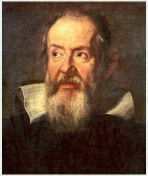
ORIENTAMENTO

Gennaio 2020

Che cosa è la Matematica?

Galileo Galilei (1623)

Il libro della natura è scritto in lingua matematica ed i suoi caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.



Scienza

- La scienza dello spazio e del numero.
- La scienza della struttura, dell'ordine, della relazione, che si è sviluppata dalla pratica elementare del contare, del misurare e del descrivere la forma degli oggetti. Ha a che fare con il ragionamento logico e con il calcolo quantitativo e il suo sviluppo ha portato ad un crescente grado di idealizzazione e astrazione.

Che cosa è la Matematica?

Henri Poincaré (1908)

La matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse, all'opposto della poesia che è l'arte di dare nomi diversi alla stessa cosa.

Gioco Formale

- La matematica è la disciplina che trae conclusioni necessarie.
- Come espressione della mente umana, la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità.

Chi sono i Matematici?

Jonathan Swift (1726)

Sembra che codesta gente sia tanto immersa nelle sue profonde meditazioni da trovarsi in uno stato di perpetua distrazione, dimodoché nessuno può parlare né udire i discorsi altrui se qualche impressione esterna non viene a scuotere i suoi organi uditivi. Perciò le persone benestanti hanno sempre seco un domestico battitore il quale ne risveglia l'attenzione: né escono mai di casa senza di lui.

Robert Musil (1913)

I pionieri della matematica ricavarono da certi princìpi delle idee utilizzabili. Da quelle idee nacquero deduzioni, tipi di calcolo, risultati. I fisici ci misero su le mani e ne ricavarono nuovi risultati. Alla fine arrivarono i tecnici ci fecero su dei nuovi calcoli e crearono le macchine. Ma a un tratto, quando ogni cosa era stata realizzata per il meglio, saltan su i matematici - quelli che si lambiccano il cervello più vicino alle fondamenta - e si accorgono che nelle basi di tutta la faccenda c'è qualcosa che non torna. Proprio così, i matematici guardarono giù al fondo e videro che tutto l'edificio è sospeso in aria. Eppure le macchine funzionano!

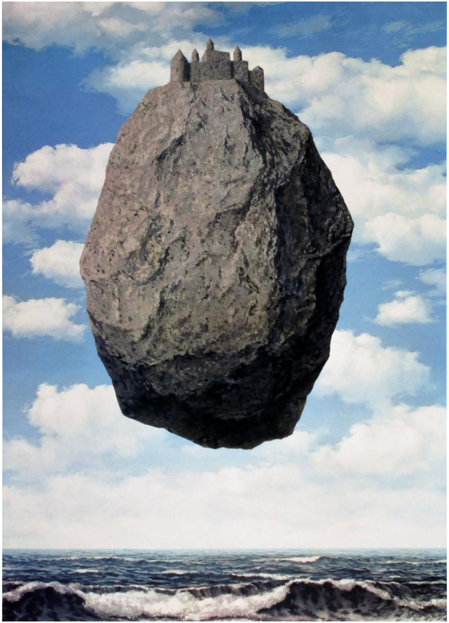
Chi sono i Matematici?

Jonathan Swift (1726)

Sembra che codesta gente sia tanto immersa nelle sue profonde meditazioni da trovarsi in uno stato di perpetua distrazione, dimodoché nessuno può parlare né udire i discorsi altrui se qualche impressione esterna non viene a scuotere i suoi organi uditivi. Perciò le persone benestanti hanno sempre seco un domestico battitore il quale ne risveglia l'attenzione: né escono mai di casa senza di lui.

Robert Musil (1913)

I pionieri della matematica ricavarono da certi princìpi delle idee utilizzabili. Da quelle idee nacquero deduzioni, tipi di calcolo, risultati. I fisici ci misero su le mani e ne ricavarono nuovi risultati. Alla fine arrivarono i tecnici ci fecero su dei nuovi calcoli e crearono le macchine. Ma a un tratto, quando ogni cosa era stata realizzata per il meglio, saltan su i matematici - quelli che si lambiccano il cervello più vicino alle fondamenta - e si accorgono che nelle basi di tutta la faccenda c'è qualcosa che non torna. Proprio così, i matematici guardarono giù al fondo e videro che tutto l'edificio è sospeso in aria. Eppure le macchine funzionano!



René Magritte,
Le Château des Pyrénées
(1959)

Antiche necessità

Tavola Babilonese (1830-1531 A.C.)

Papiro di Rhind (1550-1450 A.C.)

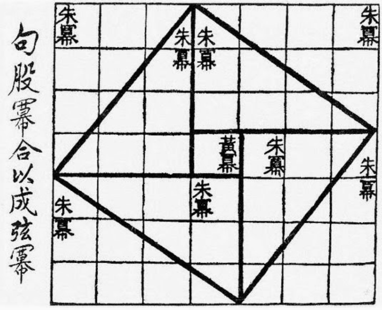
Antiche necessità

Tavola Babilonese (1830-1531 A.C.)

Papiro di Rhind (1550-1450 A.C.)

Antiche necessità

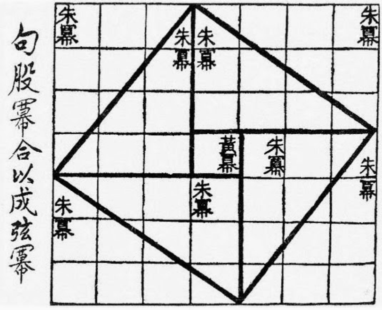
Zhoubi Suanjing (1046-771 A.C.)



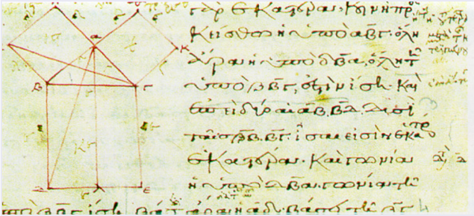
Gli Elementi (570-495 A.C.)

Antiche necessità

Zhoubi Suanjing (1046-771 A.C.)



Gli Elementi (570-495 A.C.)



Gli Elementi di Euclide - Postulati

1. È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
2. È possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.
3. È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza qualsiasi.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.
5. Se una retta, intersecando altre due, forma con esse da una medesima parte angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Gli Elementi di Euclide - Postulati

1. È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
2. È possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.
3. È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza qualsiasi.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.
5. Se una retta, intersecando altre due, forma con esse da una medesima parte angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Si può migliorare?

Come semplificare il quinto postulato?

- Modificando la definizione di rette parallele.
- Cercando di sostituirlo con un altro più intuitivo e quindi di più facile accettazione.
- Provando a convertirlo in teorema, da dimostrarsi con il sussidio dei postulati precedenti.

Euclides vindicatus di G. Saccheri (1733)

In un quadrilatero in cui $AC = BD$ e gli angoli in A e in B sono retti, si dimostra che gli angoli in C e in D sono uguali tra loro.

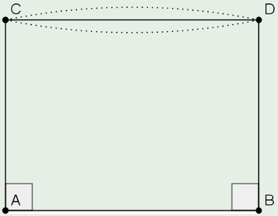
- Ipotesi dell'angolo retto: $\mathbf{CD} = \mathbf{AB}$
- Ipotesi dell'angolo ottuso: $\mathbf{CD} < \mathbf{AB}$
- Ipotesi dell'angolo acuto: $\mathbf{CD} > \mathbf{AB}$

Si può migliorare?

Come semplificare il quinto postulato?

- Modificando la definizione di rette parallele.
- Cercando di sostituirlo con un altro più intuitivo e quindi di più facile accettazione.
- Provando a convertirlo in teorema, da dimostrarsi con il sussidio dei postulati precedenti.

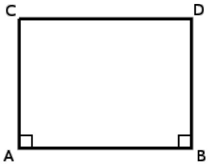
Euclides vindicatus di G. Saccheri (1733)



In un quadrilatero in cui AC = BD e gli angoli in A e in B sono retti, si dimostra che gli angoli in C e in D sono uguali tra loro.

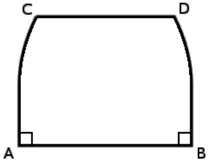
- Ipotesi dell'angolo retto: **CD** = **AB**
- Ipotesi dell'angolo ottuso: **CD** < **AB**
- Ipotesi dell'angolo acuto: **CD** > **AB**

Geometrie non euclidee



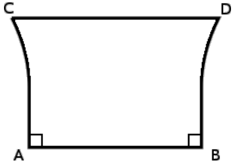
Ipotesi dell'angolo retto

La somma degli angoli interni ad un triangolo è uguale a due retti.



Ipotesi dell'angolo ottuso

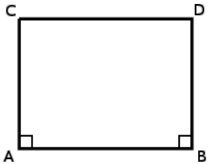
La somma degli angoli interni ad un triangolo è maggiore di due retti.



Ipotesi dell'angolo acuto

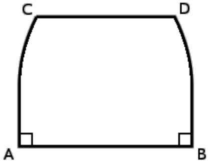
La somma degli angoli interni ad un triangolo è minore di due retti.

Geometrie non euclidee



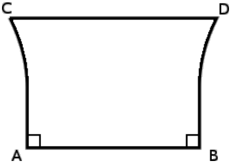
Ipotesi dell'angolo retto

La somma degli angoli interni ad un triangolo è uguale a due retti.



Ipotesi dell'angolo ottuso

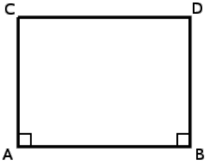
La somma degli angoli interni ad un triangolo è maggiore di due retti.



Ipotesi dell'angolo acuto

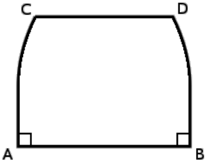
La somma degli angoli interni ad un triangolo è minore di due retti.

Geometrie non euclidee



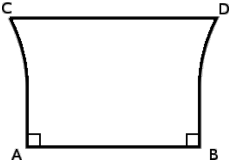
Ipotesi dell'angolo retto

La somma degli angoli interni ad un triangolo è uguale a due retti.



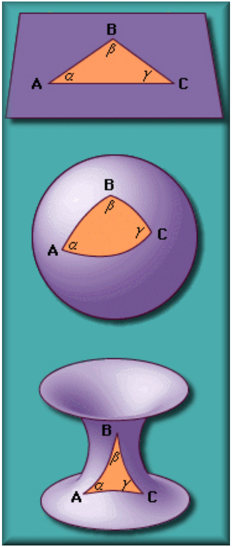
Ipotesi dell'angolo ottuso

La somma degli angoli interni ad un triangolo è maggiore di due retti.



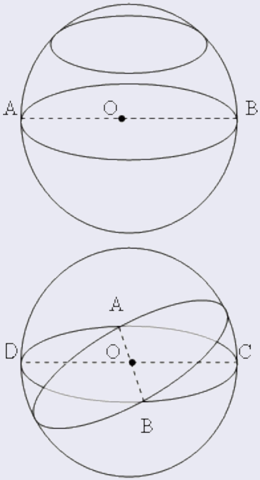
Ipotesi dell'angolo acuto

La somma degli angoli interni ad un triangolo è minore di due retti.



Geometria Ellittica (Riemann)

Modello Sferico: punti e rette

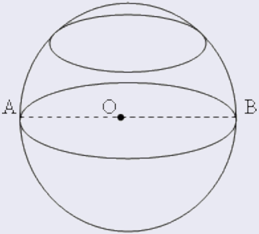


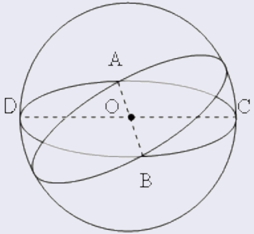
Modello Piano

Tassellazione sferica

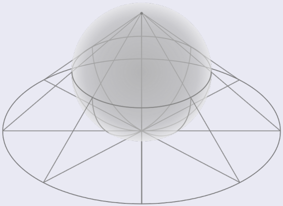
Geometria Ellittica (Riemann)

Modello Sferico: punti e rette





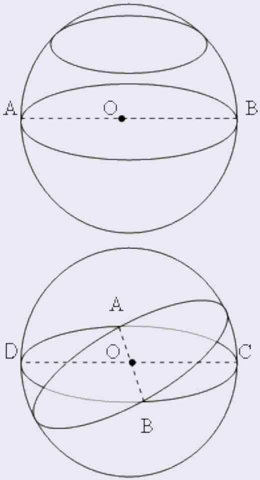
Modello Piano



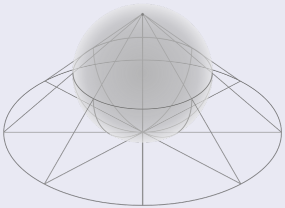
Tassellazione sferica

Geometria Ellittica (Riemann)

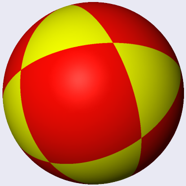
Modello Sferico: punti e rette



Modello Piano

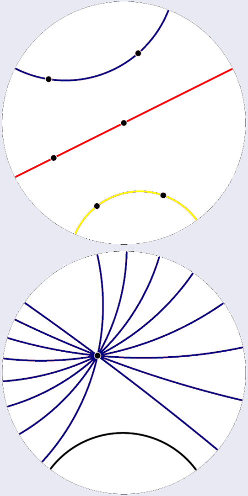


Tassellazione sferica



Geometria Iperbolica (Gauss, Bolyai, Lobachevsky)

Disco di Poincaré: rette parallele

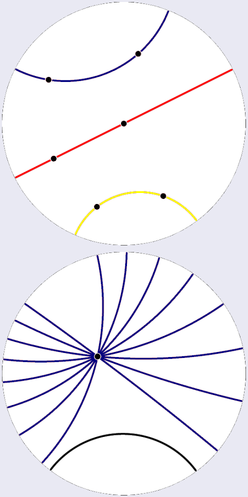


Retta per due punti

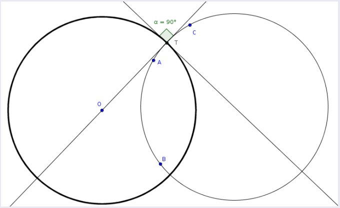
Tassellazione iperbolica

Geometria Iperbolica (Gauss, Bolyai, Lobachevsky)

Disco di Poincaré: rette parallele



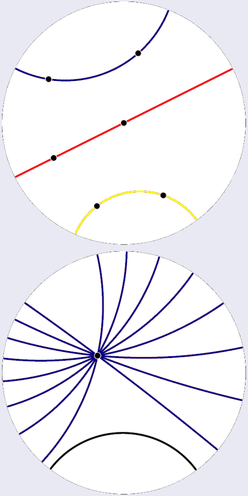
Retta per due punti



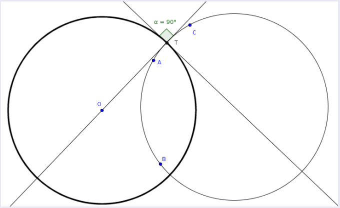
Tassellazione iperbolica

Geometria Iperbolica (Gauss, Bolyai, Lobachevsky)

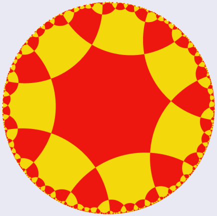
Disco di Poincaré: rette parallele



Retta per due punti

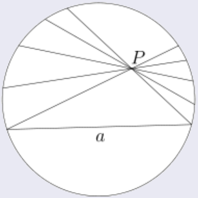


Tassellazione iperbolica



Geometria Iperbolica (Gauss, Bolyai, Lobachevsky)

Disco di Beltrami-Klein: rette

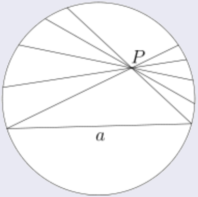


Tassellazione iperbolica

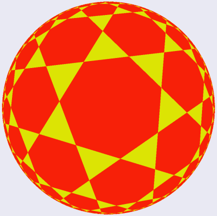
Rette ortogonali

Geometria Iperbolica (Gauss, Bolyai, Lobachevsky)

Disco di Beltrami-Klein: rette



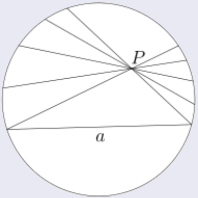
Tassellazione iperbolica



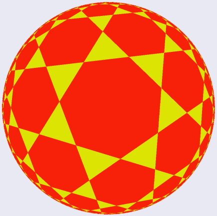
Rette ortogonali

Geometria Iperbolica (Gauss, Bolyai, Lobachevsky)

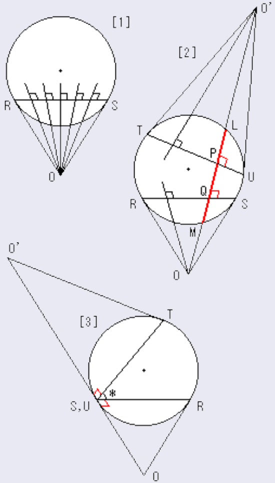
Disco di Beltrami-Klein: rette

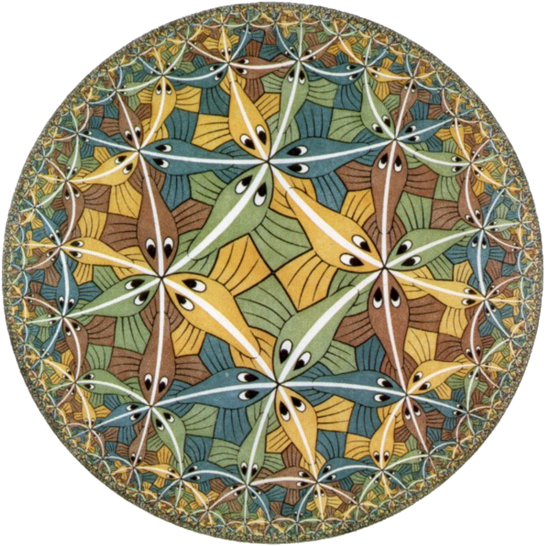


Tassellazione iperbolica



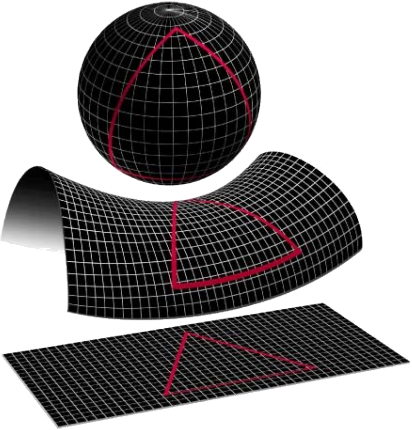
Rette ortogonali





Maurits Cornelis Escher, Circle Limit III (1959)

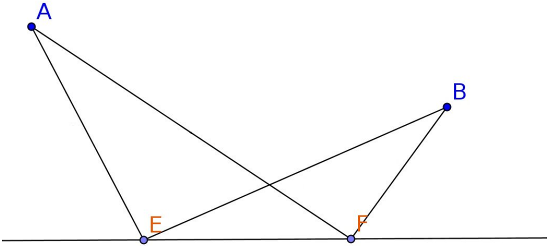
Dove siamo arrivati?



- Localmente la geometria euclidea risulta essere efficace e risponde a molte esigenze pratiche.
- Allargando gli orizzonti e considerando l'intero pianeta, la geometria più opportuna per tracciare rotte e calcolare distanze è quella ellittica.
- Rivolgendoci invece a distanze siderali, secondo alcune teorie la **curvatura** dell'universo è influenzata dalla massa degli oggetti in esso contenuti. Esistono diversi modelli geometrici per descrivere il nostro universo ed utilizzano geometrie non euclidee.

Problemino di Geometria

Siano $A \equiv (a, b)$ e $B \equiv (c, d)$ due punti di un piano cartesiano appartenenti al semipiano positivo delle ordinate.
Trovare il punto $P \equiv (x, 0)$ tale che $\overline{AP} + \overline{PB}$ è minima.



Una soluzione...

Si parte usando la formula della distanza fra due punti:

$$\overline{AP} = \sqrt{(a-x)^2 + b^2}, \qquad \overline{PB} = \sqrt{(x-c)^2 + d^2}.$$

Bisogna trovare il minimo della funzione:

$$f(x) = \sqrt{(a-x)^2 + b^2} + \sqrt{(x-c)^2 + d^2}$$

Quindi calcoliamo la derivata di $f(x)$ e la uguagliamo a zero:

$$f'(x) = \frac{-2(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} + \frac{2(x-c)}{\sqrt{(x-c)^2 + d^2}} = 0.$$

Una soluzione...

Il che significa risolvere:

$$(a-x)\sqrt{(x-c)^2+d^2} = (x-c)\sqrt{(a-x)^2+b^2}.$$

Si elevano al quadrato entrambi i membri:

$$(a-x)^2((x-c)^2+d^2) = (x-c)^2((a-x)^2+b^2).$$

Si sviluppa:

$$\begin{aligned}
&a^2c^2 - 2a^2cx + a^2d^2 + a^2x^2 - 2ac^2x + 4acx^2 + \\
&- 2ad^2x - 2ax^3 + c^2x^2 - 2cx^3 + d^2x^2 + x^4 = \\
&= a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 - 2ac^2x + 4acx^2 - 2ax^3 + \\
&+ b^2c^2 - 2b^2cx + b^2x^2 + c^2x^2 - 2cx^3 + x^4
\end{aligned}$$

Una soluzione...

E semplificando si ottiene: $(d^2 - b^2)x^2 - 2(ad^2 + b^2c)x + (a^2d^2 - b^2c^2) = 0$.
Si risolve l'equazione di secondo grado con la formula ridotta:

$$x = \frac{ad^2 + b^2c \pm \sqrt{(ad^2 + b^2c)^2 - (d^2 - b^2)(a^2d^2 - b^2c^2)}}{d^2 - b^2}.$$

Si sviluppa, si semplifica e si trova:

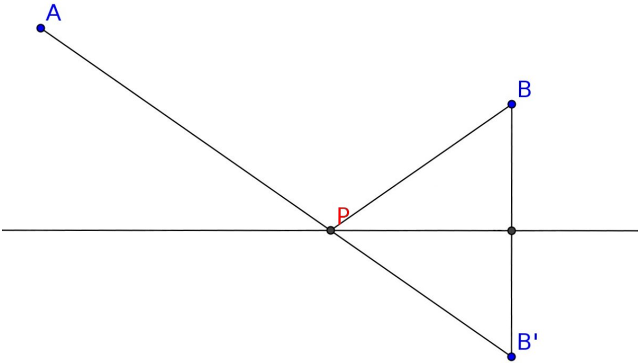
$$x_1 = \frac{ad + bc}{b + d}, \qquad x_2 = \frac{ad - bc}{d - b}.$$

tramite la derivata seconda di $f(x)$ si scopre che entrambi i valori minimizzano la distanza, ma poiché l'ascissa di P deve essere maggiore dell'ascissa di A e minore di quella di B la soluzione da scegliere è:

$$x = \frac{ad + bc}{b + d}.$$

E invece si potrebbe...

Si può immaginare l'esistenza di un punto B' simmetrico di B rispetto all'asse x.



E anche i calcoli sarebbero più semplici:

Il punto simmetrico si può esprimere come $B' \equiv (c, -d)$.
Congiungere A con B' e trovare il punto P cercato. Se si vogliono fare i calcoli, essi sono decisamente più facili. La retta che congiunge A con B' ha equazione:

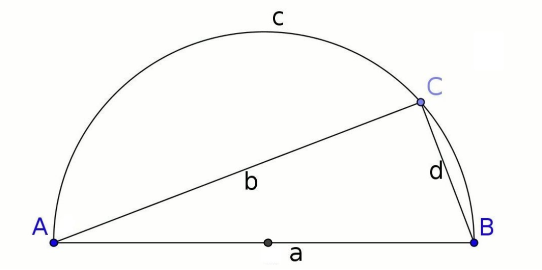
$$\frac{x-a}{c-a} = \frac{y-b}{-d-b}.$$

La sua intersezione con l'asse x si trova mettendo $y = 0$ in questa equazione, e si trova subito:

$$x = \frac{ad+bc}{b+d}.$$

Un altro piccolo esempio

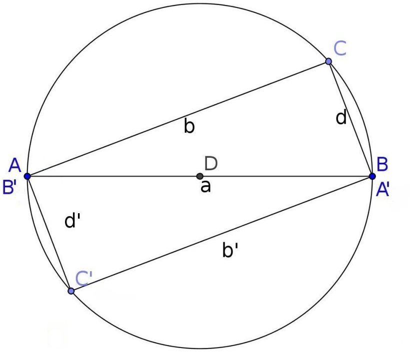
Provare che un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.



La dimostrazione che si insegna a scuola è basata sul fatto che l'angolo alla circonferenza è metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.

E invece si potrebbe...

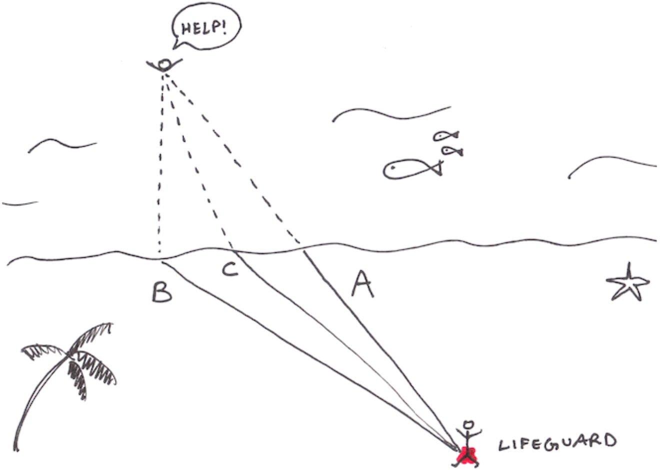
Ruotare la figura di un angolo piatto attorno al centro della semicirconferenza.



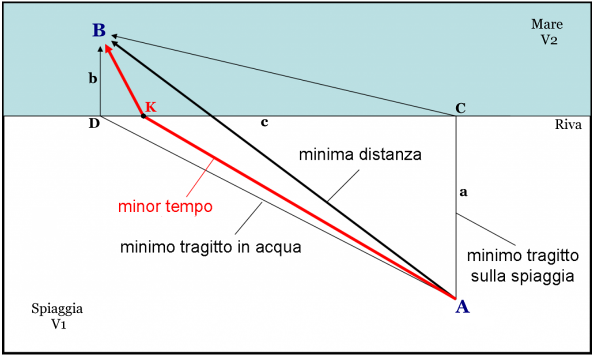
Un parallelogramma avente le diagonali congruenti è un rettangolo.

Il problema del bagnino

Qual è il percorso che il bagnino deve scegliere per salvare il bagnante?



Il problema del bagnino



Determinare il percorso *AKB* il cui tempo di percorrenza sia minimo tenendo conto che la velocità del bagnino sulla spiaggia (v_1) è maggiore della velocità in acqua (v_2).

... la soluzione

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}:$$

il valore di x che minimizza il tempo è tale che

$$T'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0,$$

ovvero

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{x - c}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

che equivale a

$$\frac{1}{v_1}\frac{CK}{AK} = \frac{1}{v_2}\frac{KD}{KB}$$

e quindi:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin r}{\sin i} \quad \Leftrightarrow \quad n_1 \sin i = n_2 \sin r.$$

Maurits Cornelis Escher, Waterfall (1961)