Zero e dintorni

Luca Amata

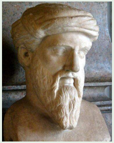
Dipartimento MIFT
Università di Messina

International Skills Meeting

Novembre 2019

Che cosa sono i numeri?

Pitagora (VI secolo a.C.)



Dal momento che nei numeri a loro sembrò di vedere molte rassomiglianze con le cose che esistono e vengono in essere, allora immaginarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le cose e il cielo essere un numero.

Gianni Rodari (1962)

- *Inventiamo dei numeri?*
- *Inventiamoli, comincio io.* **Quasi uno**, **quasi due**, **quasi tre**, **quasi quattro**, **quasi cinque**, **quasi sei**.

Definizione

- Ciascuno degli enti astratti che costituiscono una successione ordinata e che servono a indicare la quantità degli oggetti costituenti un insieme. (*Treccani*)

Tutti d'accordo?

Pitagora (VI secolo a.C.)

Le cose sono numeri. I numeri governano il mondo. (Platone, IV secolo a.C.)

George Berkeley (1707)

Va osservato che il numero non è qualcosa di fisso e determinato, che esista realmente nelle cose. Esso è esclusivamente una creatura dello spirito.

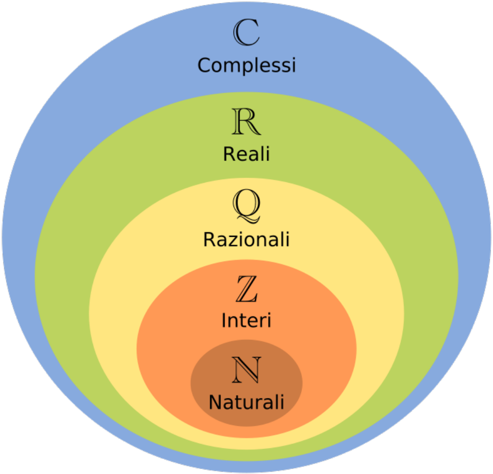
Leopold Kronecker (1886)

Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo.

Ludwig Wittgenstein (1956)

I numeri non sono fondamentali per la matematica.

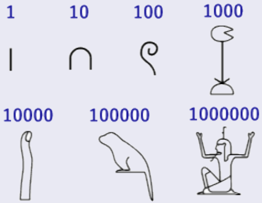
Quali sono i Numeri?



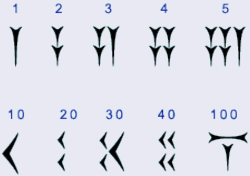
Numeri Naturali

Osso d'Ishango (20000 a.C.)

Geroglifici (3000 a.C.)

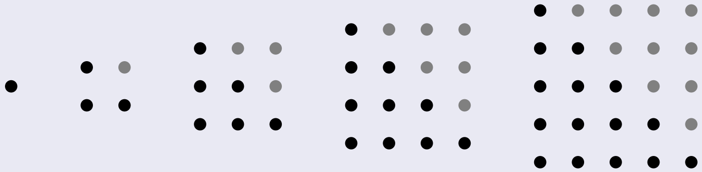


Cuneiformi (2000 a.C.)



Numeri Naturali

Geometrizzazione (VI secolo a.C.)



Astrazione (V secolo a.C.)

- **Euclide** ne *Gli Elementi*, definisce in maniera astratta i concetti di *unità* e di numero naturale inteso come *moltitudine*.
- **Aristotele** fornisce la definizione di numero come ciò che è divisibile in parti uguali dette unità.

Formalizzazione (1889)

Una formalizzazione *assiomatica* dell'insieme dei numeri naturali viene data nel 1889 da **Peano** (sfruttando in modo originale alcuni risultati di **Dedekind**).

Arithmetices Principia, Peano (1889)

Axiomata.

1. $1 \,\epsilon\, N.$
2. $a \,\epsilon\, N \,.\supset.\, a = a.$
3. $a, b, c \,\epsilon\, N \,.\supset\!:\, a = b \,.=.\, b = a.$
4. $a, b \,\epsilon\, N \,.\supset\therefore\, a = b \,.\, b = c \,:\supset.\, a = c.$
5. $a = b \,.\, b \,\epsilon\, N \,:\supset.\, a \,\epsilon\, N.$
6. $a \,\epsilon\, N \,.\supset.\, a + 1 \,\epsilon\, N.$
7. $a, b \,\epsilon\, N \,.\supset\!:\, a = b \,.=.\, a + 1 = b + 1.$
8. $a \,\epsilon\, N \,.\supset.\, a + 1 -= 1.$
9. $k \,\epsilon\, K \therefore 1 \,\epsilon\, k \therefore x \,\epsilon\, N \,.\, x \,\epsilon\, k \,:\supset_x.\, x + 1 \,\epsilon\, k \,::\supset.\, N \supset k.$

(P1) $x_0 \in X$

(P2) $x \in X \Rightarrow s(x) \in X$

(P3) $x \neq y \Rightarrow s(x) \neq s(y)$

(P4) $s(x) \neq x_0 \quad \forall \quad x \in X$

(P5) $U \subset X : x_0 \in U \wedge (x \in U \Rightarrow s(x) \in U) \Rightarrow U = X$

Esempi

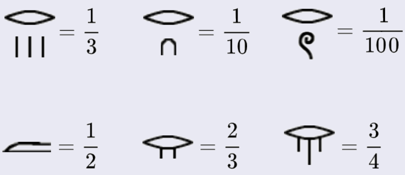
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, con $x_0 = 0$ e $s(x) = x + 1$.
- $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, con $x_0 = 0$ e $s(x) = x + 2$.
- $\mathbb{D} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, con $x_0 = 1$ e $s(x) = x + 2$.

Isomorfismo

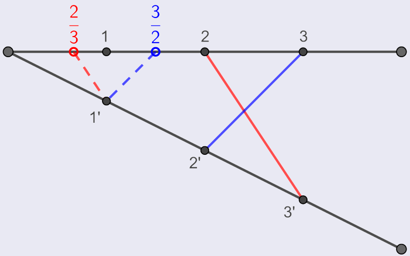
In $\mathbb{D}$ si definisce una somma tale che risulti $\mathbb{D}(\oplus) \cong \mathbb{N}(+)$:
$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} := \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{1}$.

Numeri Razionali (positivi)

Egizi e Babilonesi (2000 a.C.)



Greci (V secolo a.C.)



Assiomatizzazione (XIX secolo)

- **Bolzano** definisce i Razionali come quell'insieme di numeri chiuso rispetto alle quattro operazioni aritmetiche elementari.
- **Kronecker**, **Dedekind**, **Weber** formalizzano algebricamente il campo dei Razionali.

Numeri Razionali (positivi)

Costruzione algebrica

- Poiché la divisione fra numeri naturali non sempre è un numero naturale, è possibile costruire l'insieme delle frazioni cioè l'insieme $\mathbb{Q}^+$ dei numeri razionali positivi.
- Si considerino il prodotto cartesiano $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ e la relazione di equivalenza:

$$(m, n) \sim (m', n') \iff m \cdot n' = m' \cdot n.$$

- Si definisce l'insieme delle classi di equivalenza $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_\sim$, dove ogni classe è formata da tutte le coppie in relazione fra loro.
- Si estendono ad esso le operazioni dei Naturali e si definisce la divisione.
- Questo insieme è *isomorfo* a $\mathbb{Q}^+$.

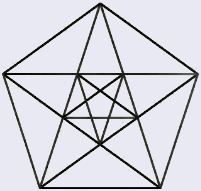
Esempi

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$: $\quad 2 = \overline{(2,1)} = \{(2,1), (4,2), \ldots\}, \quad 3 = \overline{(3,1)} = \{(3,1), (6,2), \ldots\}.$
- La frazione $\dfrac{2}{3}$ è la classe: $\quad \overline{(2,3)} = \{(2,3), (4,6), (8,12) \ldots\}.$

Numeri Irrazionali

I Pitagorici (V secolo a.C.)

Ippaso di Metaponto scopre coppie di segmenti *incommensurabili*, quindi non esprimibili come frazioni.



Indiani e Arabi (VII-VIII secolo)

- In India si usano **frazioni continue** per risolvere equazioni lineari.
- Gli Arabi operano *algoritmicamente* su quantità radicali non razionali.

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Formalizzazione (XIX secolo)

- **Cauchy**,**Weierstrass** usano metodi analitici per completare il campo dei Razionali.
- **Cantor**,**Dedekind** forniscono definizioni e costruzioni del campo dei Reali.

Numeri Irrazionali

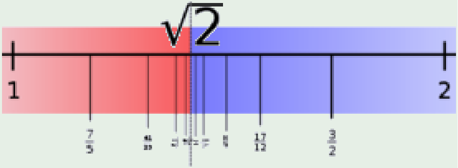
Non esistono due interi positivi n e m tali che $n^2 = 2m^2$ (Aristotele)

- Supponiamo che n ed m siano due interi positivi *primi fra loro* tali che $n^2 = 2m^2$.
- Sia $\mathbb{N} = \mathbb{P} \uplus \mathbb{D}$. Si ha che: $n^2 \in \mathbb{P} \Leftrightarrow n \in \mathbb{P}$ e $n^2 \in \mathbb{D} \Leftrightarrow n \in \mathbb{D}$
- Quindi $n^2 = 2m^2 \Rightarrow n^2 \in \mathbb{P} \Rightarrow n \in \mathbb{P} \Rightarrow m \in \mathbb{D} \Rightarrow m^2 \in \mathbb{D}$.
- Si osserva che n^2 è divisibile per 4, $2m^2$ è divisibile per 2 ma non per 4 il che è una contraddizione. Quindi $n^2 = 2m^2$ è assurdo.

Completare $\mathbb{Q}^+$

- È possibile trovare un insieme numerico che contenga $\mathbb{Q}^+$ e sia completo?
- Riuscire a trovarlo significa che la ricerca dei Numeri può dirsi conclusa?

Come descrivere $\sqrt{2}$?



Numeri Reali (positivi)

Il segreto della continuità: le **Sezioni** (Dedekind)

Sia **AB** un segmento della retta diviso in due classi tali che:

- ciascun punto di **AB** appartenga ad una ed una sola classe;
- l'estremo **A** appartenga alla prima classe e l'estremo **B** alla seconda;
- ciascun punto della prima classe si trovi a sinistra di ogni punto della seconda.

Allora esiste un unico punto **C** appartenente ad **A** o a **B**, tale che ciascun punto di **AB** che lo precede stia in **A** e tutti gli altri in **B**.

Definizione di $\sqrt{2}$ (tramite razionali)

- Si possono costruire due Sezioni di numeri razionali, essendo tale insieme *ordinato*, in base alla relazione d'ordine $<$.
- Gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 \geq 2\}$ soddisfano la definizione di Sezione per l'insieme dei Razionali positivi.
- Quindi esiste un unico elemento di separazione ed è quello per cui $x^2 = 2$, cioè $\sqrt{2}$.
- L'insieme di tutte le Sezioni di $\mathbb{Q}^+$ è l'insieme dei Reali $\mathbb{R}^+$.

Numeri Interi e Zero

In India (VII secolo)

- **Brahmagupta** lavora con numeri dotati di **segno**, per risolvere particolari equazioni, e dà un'interpretazione ai risultati negativi.
- Due secoli dopo, **Sridhara** estende le operazioni allo **zero**, fino ad allora usato per notazioni *posizionali*, definendone le proprietà.

In Europa (XVI secolo)

Le quantità **negative** si diffondono grazie ai matematici rinascimentali (**Fibonacci**, **Ferrari**, **Del Ferro**) come strumenti per risolvere equazioni. **Descartes** li definisce numeri *falsi*.

Assiomatizzazione (XIX secolo)

La definizione di insieme degli **interi** viene formulata tramite l'utilizzo di strutture astratte dell'algebra moderna dapprima da **Kronecker**.

Numeri Interi

Costruzione algebrica

- Poiché la sottrazione fra numeri naturali non sempre è un numero naturale, è possibile costruire l'insieme dei numeri Interi $\mathbb{Z}$.
- Si considerino il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e la relazione di equivalenza:

$$(m, n) \sim (m', n') \iff m + n' = m' + n.$$

- Si definisce l'insieme delle classi di equivalenza $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{\sim}$, dove ogni classe è formata da tutte le coppie in relazione fra loro.
- Si estendono ad esso le operazioni dei Naturali e si definisce la sottrazione.
- Questo insieme è *isomorfo* a $\mathbb{Z}$.

Esempi

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: $\quad 2 = \overline{(2,0)} = \{(3,1), (4,2), \dots\}, \quad 3 = \overline{(3,0)} = \{(4,1), (5,2), \dots\}.$
- Il numero $2 - 3 = -1$ è la classe: $\quad \overline{(2,3)} = \{(1,2), (3,4) \dots\}.$

Numeri Immaginari e Complessi

In Italia (dal XV secolo)

- **Tartaglia** e **Del Ferro** trovano formule per risolvere quadriche e cubiche, ma **Cardano** è il primo a divulgarne una.
- Data l'equazione $x^3 = px + q$, ponendo $d = (\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3$, si trova la formula: $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{d}}$.
- Per $x^3 = 15x + 4$ si ha $d = -121 < 0$ (quantità *impossibili*).

L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

- Il primo a formalizzare questi nuovi numeri è **Bombelli** (1572), esponendone le regole di calcolo.
- Tratta i *numeri Immaginari* giungendo alla conclusione che $(-i)(-i) = -1$ e giunge tramite vari calcoli all'identità fra i *numeri Complessi* $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$.
- Per $x^3 = 15x + 4$ si ha $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, quindi $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$.

Numeri Immaginari e Complessi

In Europa (dal XVII secolo)

- **Cartesio** conia il termine **numeri immaginari** e **Leibniz** diffonde articoli nei quali scrive di tali numeri come in bilico fra l'esistenza e la non esistenza.
- **Eulero** è uno dei primi matematici ad utilizzare correntemente quantità immaginarie. Sua la famosa identità $\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0}$.
- **Wessel**, **Argand** e **Gauss** ideano una rappresentazione grafica per i numeri complessi. Per il *teorema fondamentale dell'algebra* sono la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$.

Costruzione algebrica

- Si consideri il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e le operazioni così definite: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}', \mathbf{b}') := (\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b} + \mathbf{b}')$ e $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \odot (\mathbf{a}', \mathbf{b}') := (\mathbf{aa}' - \mathbf{bb}', \mathbf{ab}' + \mathbf{b}'\mathbf{b})$.
- La struttura $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})(+, \odot)$ è il campo dei numeri Complessi $\mathbb{C}$.

Esempi

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 0i$.
- Unità immaginaria $\mathbf{i} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{0} + \mathbf{i}$: $i^2 = (0, 1) \odot (0, 1) = (0 - 1, 0) = -1$.

(Numeri Algebrici e Trascendenti)

Un diverso modo di classificare

- Un numero è detto **algebrico** se esiste un polinomio non nullo a coefficienti interi che lo ammette come radice; **trascendente** altrimenti.
- $\sqrt{2}$ è algebrico poiché radice di $x^2 - 2$; i è algebrico poiché radice di $x^2 + 1$.

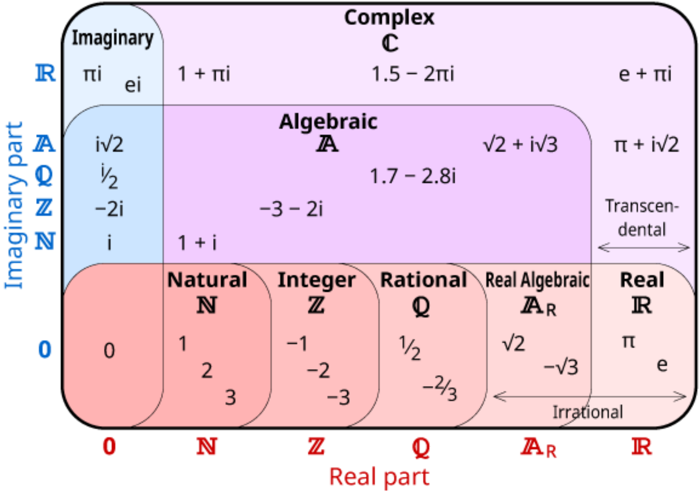
... e la trascendenza?

- Nel 1806 **Legendre** congettura la trascendenza di π.
- Nel 1844 **Liouville** definisce una costante e ne prova la trascendenza: $c = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 10^{-1!} + 10^{-2!} + \cdots = 0,110001000000000000000001 0 \cdots$.
- Nel 1873 e nel 1882 **Hermite** e **Lindemann** dimostrano, rispettivamente, la trascendenza di **e** e di π.

Teorema di Lindemann-Weierstrass

- Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ numeri algebrici distinti, allora non esiste alcuna equazione $\beta_1 \mathbf{e}^{\alpha_1} + \cdots + \beta_1 \mathbf{e}^{\alpha_n} = \mathbf{0}$ con coefficienti β_i numeri algebrici non tutti nulli.
- Se $n = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ allora **e** è trascendente.
- Poiché $1 = e^{2i\pi}$, allora π è trascendente.

Numeri


Complex
ℂ
Imaginary
πi
ei
1 + πi
1.5 − 2πi
e + πi
Algebraic
𝔸
iv2
√2 + i√3
π + i√2
½
1.7 − 2.8i
−2i
−3 − 2i
Transcen-
dental
i
1 + i
Natural
ℕ
Integer
ℤ
Rational
ℚ
Real Algebraic
𝔸R
Real
ℝ
0
1
2
3
−1
−2
−3
½
−⅔
√2
−√3
π
e
Irrational
Imaginary part
ℝ
𝔸
ℚ
ℤ
ℕ
0
0
ℕ
ℤ
ℚ
𝔸R
ℝ
Real part

Ancora...

Qualche rinuncia

- I Complessi $\mathbb{C} = \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ costituiscono un campo che estende $\mathbb{R}$.
- Ma non è possibile estendere ai Complessi l'**ordinamento** dei Reali:

Se fosse $i > 0$ allora dovrebbe valere anche: $-1 > 0$ ↯

Hamilton e i Quaternioni (1843)

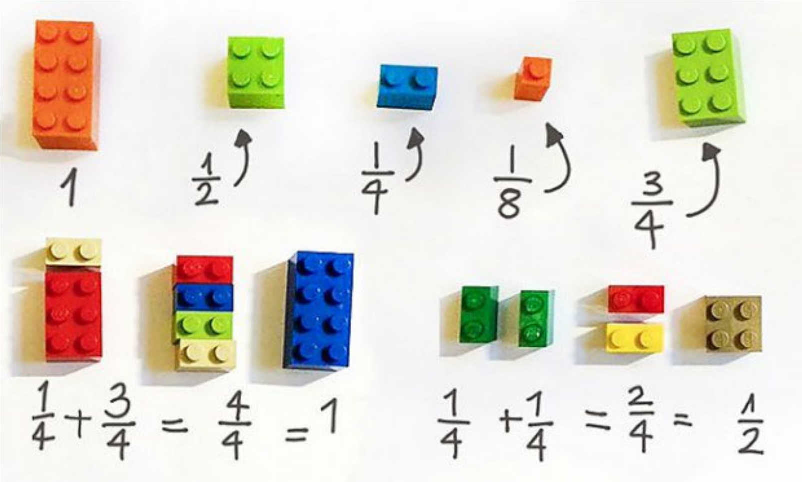
- Sia $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ con $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$
- $\mathbb{H}$ estende $\mathbb{C}$, ma in questo caso si perde la **commutatività**:

$$ij = k; \quad jk = i; \quad ki = j; \quad ji = -k; \quad kj = -i; \quad ik = -j$$

Rotazioni nello spazio

- Il sottoinsieme $\mathcal{U} = \{bi + cj + dk \ : \ b, c, d \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{H}$ rappresenta lo spazio $\mathbb{R}^3$.
- Preso un punto $y \in \mathcal{U}$ e un quaternione $q \in \mathbb{H}$ si calcola la **rotazione** qyq^{-1}.

Quaternioni


1
1/2
1/4
1/8
3/4
1/4 + 3/4 = 4/4 = 1
1/4 + 1/4 = 2/4 = 1/2